1. 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

이므로 위의 식을 x와 y로 각각 미분하면

$$f'(xy)y = f'(x)$$

$$f'(xy)x = f'(y)$$

따라서, 모든 $x \neq 0$, $y \neq 0$,

$$xf'(x) = yf'(y)$$ 이

성립한다.

모든 $x \neq 0$ 에 대하여

$$xf'(x) = C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{C}{x}, \quad x \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = C\ln|x| + D$$

$$x \neq 0.$$

그런데 f가 연속이기 때문에

$$0 = f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$$

$$\Rightarrow C = 0, \quad D = 0$$

$$\therefore \quad f(x) = 0$$

2.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_j} \geq n \sqrt[n]{\left(\frac{a_{j_1}}{a_1}\right)\left(\frac{a_{j_2}}{a_2}\right)\cdots\left(\frac{a_{j_n}}{a_n}\right)}$$

$$\left(\begin{array}{l} \dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n} \geq \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} \text{ 이고} \\ \quad y_i > 0 \\ \dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n} = \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} \\ \iff y_1 = y_2 = \cdots = y_n . \end{array} \right)$$

따라서

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_j}$ 의 최솟값은 n 이고

모든 $j=1, 2, \cdots, n$ 에 대하여

$a_{ij} = a_j$ 일 때

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_j} = n$ 이다.

3. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sum_{k=1}^{n} k^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^{n-1}}{n(n+1)(2n+1)}$$

교대급수 판정법에 의하여 위의 급수는 수렴한다.

$$S \underset{=}{\text{놓자}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^{n-1}}{n(n+1)(2n+1)}$$

$$= 6\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}\right](-1)^{n-1}$$

그런데,

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)(-1)^{n-1}$$

$$= \left(1 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) - \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} + \frac{1}{4}\right) - \cdots$$

$$+ (-1)^{N-1}\left(\cancel{\frac{1}{N}} + \frac{1}{N+1}\right)$$

$$= 1 + (-1)^{N-1}\frac{1}{N+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)(-1)^{n-1} = 1 \text{ 이다.}$$

또한

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \mathrm{Tan}^{-1} x \quad , |x| \le 1 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \mathrm{Tan}^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \text{이다.}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

$$= -\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

따라서

$$S = 6\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)(-1)^{n-1} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}\right]$$

$$= 6\left(1 + 4\left(\frac{\pi}{4} - 1\right)\right)$$

$$= 6\pi - 18.$$

4. $\sum_{j<l} |x_j - x_l|^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{2n} |x_j - x_l|^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{2n} \left(|x_j|^2 + |x_l|^2 - 2 x_j \cdot x_l \right)$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{2n} (2n|x_j|^2) + \sum_{l=1}^{2n} 2n|x_l|^2\right] - \left(\sum_{j=1}^{2n} x_j\right)\cdot\left(\sum_{l=1}^{2n} x_l\right)$

$= \sum_{j=1}^{2n} 2n|x_j|^2 - \left|\sum_{j=1}^{2n} x_j\right|^2 \leq \sum_{j=1}^{2n} 2n|x_j|^2 \leq 36n^2$

최댓값은 타원 위의 점에서 거리가 가장 먼 $x_j = (0,0,\pm 3)$ $j=1,2\cdots 2n$ 을 선택했을 경우

최솟값은 $\sum_{j=1}^{2n} x_j = 0$ 인 경우

따라서 $\sum_{j<l} |x_j - x_l|^2 \leq 36n^2$ 이 성립하고

만약 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = (0,0,3)$
$x_{n+1} = \cdots = x_{2n} = (0,0,-3)$

을 선택하면 $\sum_{j<l} |x_j - x_l|^2 = 36n^2$ 이 되어

최댓값은 $36n^2$ 이다.

5. • 만약 M의 모든 원소가 1 이거나 -1 인 경우에는
$\det M = 0$ 이어 2^{2022}로 나누어진다

• M이 1과 -1을 모두 포함하고 있다고 가정하고
수학적 귀납법에 의하여.

(1) M이 2×2인 경우에는 $\det M = 0, 2, -2$
임을 쉽게 알수 있다.

(2) M이 3×3인 경우 : 만약 M의 모든
행벡터들이 1 또는 -1로 이루어진 경우는
$\det M = 0$ 이다. 따라서 M의 i번째 행
벡터가 1과 -1을 모두 포함하고 있다고
하자. 예를 들어,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ -1 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \text{라고 하자}$$

$$M \xrightarrow{\text{가우스소거법}} \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0 또는 2 또는 -2

○ 부분은 변하지 않음

$$\tilde{M} = RM$$

$\det M = \det \tilde{M}$ 이고 $\det \tilde{M}$를 두번째 행을
중심으로 여인수 전개를 이용하고 (1)의 결과에
의하여 2^2으로 나누어 진다.

(3) M : $n\times n$ 행렬이라고 하자. (2)에서와 같은 방법으로 M의 모든 열벡터가 1 또는 -1로 이루어진다면 $\det M = 0$ 이다.

만약 M의 j번째 열벡터가 1과 -1을 모두 포함하고 있다면 ($a_{kj}=1$ 이고 $a_{lj}=-1$, $k<l$ 가정한다면)

$$M \xrightarrow[\text{으로 대체}]{l\text{행을 }(k\text{행}+l\text{행})} \tilde{M}$$

$\Rightarrow \det M = \det \tilde{M}$ 이고 $\det \tilde{M}$를 l행을 중심으로 여인수전개를 이용하자

$\tilde{M}$의 l번째 행의 모든 원소는 0, 2, -2 이고 나머지 행은 모든 M과 일치한다. 여인수 전개에서 나타나는 소행렬의 (minor matrix) ($(n-1)\times(n-1)$ matrix) determinant가 2^{n-2}로 나누어지므로 $\det M = \det \tilde{M}$는 2^{n-1}로 나누어진다.

* 다른 방법으로 M $(=(a_{ij}))$: $n\times n$ matrix 이고 1과 -1을 모두 포함하고 있을 때 $a_{ij}=-1$ 이라고 하자. $\tilde{M}$을 M에서 $a_{ij}=1$로 교체해서 얻어진 행렬이라고 한다면, 여인수 전개법을 이용하여

$\det M - \det \tilde{M} = \pm 2 \det A$

A는 M에서 i번째 행과 j번째

열을 제거해서 얻어진 $(n-1)\times(n-1)$ 행렬

$\Rightarrow \det M = \det \tilde{M} \pm 2 \det A$

귀납법 가정에 의하여 2^{n-2}로 나누어짐

따라서 $\det M - \det \tilde{M}$ 는 2^{n-1}으로 나누어짐

-1이 모두 없어지도록 이런 방법을 적용하면

$\det M - \det M_0$ 는 2^{n-1}로 나누어지고

M_0는 모두 1로 이루어진 행렬을

얻을 수 있다. 그런데 $\det M_0 = 0$ 이므로

$\det M$ 은 2^{n-1}로 나누어진다.

(참고. 조아현 학생의 답안임)